07-06-09

אלגברה לינארית 2 - שיעור 24

הערות לגבי חבורות ותת חבורות

① תהי G חבורה כלשהי, אז:
א) G היא תת"ח של G.
ב) $\{1_G\}$ היא תת"ח של G.

למשל: $G=\mathbb{Z}_8$ (חבורה חבורת מודולו 8) אז $\{0\}$ היא תת"ח של $\mathbb{Z}_8$.

② תהי G חבורה ציקלית
אז כל תת"ח של G היא ציקלית.

טענה: (מסקנה ממשפט לגרנג')
תהי G חבורה מסדר p ראשוני.
אז G ציקלית ולכל $1_G \neq a \in G$ $G=\langle a\rangle$

הוכחת הטענה: יהי $1_G \neq a \in G$
ממשפט לגרנג', $|\langle a\rangle|$ מחלק את $p=|G|$
לכן, $|\langle a\rangle|=1,p$, אבל מכך ש $a\neq 1_G$ נובע: $|\langle a\rangle|=p=|G|$

בנוסף, כמובן, $\langle a\rangle \subseteq G$ ומכאן $\langle a\rangle=G$ מ.ש.ל.

* הערה * תהי G חבורה מסדר n
אז G ציקלית אמ"מ קיים $g\in G$ כך ש: $o(g)=n$.

טענות נוספות על חבורות

טענה: תהי G חבורה מסדר זוגי. אז קיים $g\in G$ כך ש: $o(g)=2$.

* **הוכחה:** (נשים ♥ ש: $g\in G$ מסדר 2 אמ"מ $g^{-1}=g$ כי $gg=1_G$)
נניח בשלילה שב-G אין איברים מסדר 2. אז לכל $1_G\neq x\in G$ מתקיים: $x^{-1}\neq x$
נחלק את $G/\{1_G\}$ כאיחוד קבוצות בגודל 2 (בכל קבוצה איבר וההפכי לו).
נקבל איחוד זר ולכן $|G/\{1_G\}|$ זוגי ומכאן, G אי-זוגי בסתירה לנתון. מ.ש.ל.

* באופן כללי יותר אפשר להוכיח שאם G חבורה סופית ו-p ראשוני המחלק את $|G|$
אז יש ב-G איבר מסדר p.

למשל: עבור $G=S_4$ מתקיים: $|G|=24$, $\Leftarrow$ $24=2^3\cdot 3$
ולכן, יש ב-S_4 איבר מסדר 2 ואיבר מסדר 3.

דוגמא לאיבר מסדר 2 ב-S_4: $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$

טענה: תהי G חבורה סופית ו- $a\in G$, אז $o(a)=o(g^{-1}ag)$ $\forall g\in G$

הוכחה: G סופית ולכן הסדר של כל איבר ב-G הוא סופי.
נסמן $o(a)=m$! $o(g^{-1}ag)=k$ ונראה $m=k$.

א) $(g^{-1}ag)^m=g^{-1}a^mg = g^{-1}1_Gg=g^{-1}g=1_G$
$a^m=1_G$
$o(a)=m$
ולכן, $k=o(g^{-1}ag)\le m$

ב) נסמן $g^{-1}ag=b$ $\Longrightarrow$ $a=g(g^{-1}ag)g^{-1}=gbg^{-1}$ $\Rightarrow$

$a^k=(gbg^{-1})^k=g1_Gg^{-1}=g\cdot g^{-1}=1_G$ ולכן $m=o(a)\le k$
מא' וב' נובע: $m=k$ מ.ש.ל.

טענה: תהי G חבורה ונניח של-G איבר יחיד מסדר 2 (נסמנו a)
אז לכל $g\in G$ מתקיים: $g\cdot a=a\cdot g$

הוכחה: נובע בצורה ישירה מההוכחה הקודמת.
ניקח $g\in G$ מהטענה הקודמת $o(g^{-1}ag)=o(a)=2$
אבל מההנחה, a הוא האיבר היחיד מסדר 2 ולכן נובע $g^{-1}ag=a$ (יחידות)
נכפיל משוואה זו ב-g משמאל ונקבל $\Leftarrow$
$$gg^{-1}ag=ga$$
$$\Rightarrow ag=ga$$
מ.ש.ל.

טענה: תהי G חבורה כך שלכל $g\neq 1_G$ מתקיים $o(g)=2$.
אז G אבלית.

הוכחה: יהיו $g,h\in G$ צ"ל: $gh=hg$
נשים ♥ $(gh)^{-1}=gh$ (כי בחבורה שבה סדר כל איבר $\neq 1_G$ הוא 2, מתקיים: $x^{-1}=x$ לכל $x\in G$)
ולכן,
$$gh=(hg)^{-1}=g^{-1}h^{-1}=gh$$
כי $g^{-1}=g$ $h^{-1}=h$ מאחר ולכל איבר ב-G $x^{-1}=x$.
$gh=hg$ ולכן G אבלית. מ.ש.ל.

טענה: כל חבורה מסדר 4 היא אבלית.

הוכחה: תהי G חבורה מסדר 4. לפי מסקנה ממשפט לגרנז', הסדר של כל איבר ב-G מחלק את הסדר של G.
לכן, הסדר של כל איבר $\neq 1_G$ ב-G, הוא 2 או 4. נבחין בין 2 מקרים:

- מקרה I: יש ב-G איבר מסדר 4 (נסמנו g).
אז $G=\langle g\rangle$ ולכן G ציקלית ומכאן G אבלית.

- מקרה II: אין ב-G איבר מסדר 4. אז הסדר של כל איבר $\neq 1_G$ הוא 2.
ומהטענה הקודמת G אבלית. מ.ש.ל.

דוגמא: חבורה ציקלית מסדר 4 ($\mathbb{Z}_4$ - החבורה החיבורית מודולו 4)
$$\mathbb{Z}_4=\langle 1\rangle=\langle 3\rangle$$

דוגמא: חבורה מסדר 4 שאינה ציקלית. חבורת הסימטריה של מלבן
בחבורה זו 4 איברים:
$$id,\ g,\ \underbrace{r,\ s}_{\text{שיקופים}}$$
g - סיבוב ב-180.
זו חבורה אבלית אך אינה ציקלית, כי הסדר של כל איבר $\neq 1_G$ הוא 2
ומהטענה הקודמת, אין איבר מסדר 4.

*בניית את הכפל של חבורה מסדר 4 שאינה ציקלית:
(סימון: $G=\{1_G,a,b,c\}$, G אינה ציקלית ולכן $o(a)=o(b)=o(c)=2$

	1_G	a	b	c
1_G	1_G	a	b	c
a	a	1_G	c	b
b	b	c	1_G	a
c	c	b	a	1_G

נבנה את לוח הכפל:
$a\cdot b\neq a$ כי אחרת, נקבל: $b=1_G$
$a\cdot b\neq 1_G$ כי אחרת, $a=b$
$a\cdot b\neq b$ כי אחרת, $a=1_G$
G מסדר 4 ולכן אבלית ומכאן גם $ab=ba=c$
באופן דומה ממלאים את שאר הטבלה.

משפט (ללא הוכחה) תהי G חבורה מסדר p^2 (כאשר p ראשוני) אז G אבלית.

* הערה * כל חבורה מסדר p (כאשר p ראשוני) היא ציקלית ולכן אבלית.

* הערה * לכל p ראשוני ניתן לבנות חבורה לא אבלית מסדר p^3.

\# למשל: עבור $p=2$ החבורה: D_4 - החבורה הדיהדרלית - חבורת הסימטריה של ריבוע היא חבורה מסדר $8=2^3$, ואינה אבלית.

(*) שאלה ממבחן ⇐ תהי G חבורה.
הוכח כי $H=\{x\in G \mid x^{-1}=x\}$ מהווה תת חבורה של G.

פתרון: 1) ברור ש- $1_G\in H$ כי $1_G^{-1}=1_G$ (קיום איבר ניטרלי)

2) קיום הפכי: יהי $x\in H \Leftarrow x^{-1}=x\in H$ (הגדרת H)
ולכן הופכי $x^{-1}\in H$

3) סגירות: יהיו $x,y\in H$

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$$

H מהגדרת
$y^{-1}=y$
$x^{-1}=x$