מבחן במתמטיקה בדידה – 2008 סימסטר ב' – מועד א'

שאלה 1

שאלה 1 סעיף א': (15 נק')

איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר,4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב הוא לא לוקח שנתיים ברצף שוחד על סך 6 מיליון דולר. נסמן ב a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.

דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; ועוד כהנה וכהנה. שימי לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות.

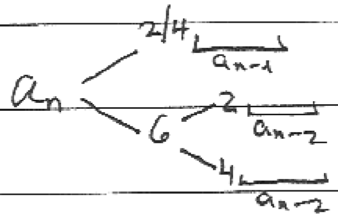
רשמי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.

נוסחת נסיגה ותנאי התחלה לסעיף א':

עבור $n\geq 2$: $a_n = 2a_{n-1}+2a_{n-2}$. $a_1=3$, $a_0=1$.

פירוט חישובים והסברים:

שקול למס' המילים באורך n מעל הא"ב $\{2,4,6\}$ ללא הרצף 66.



$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 2a_{n-1}+2a_{n-2} \\ a_0=1, \quad a_1=3 \end{cases}$$

9:10.

שאלה 1 סעיף ב': (15 נק')

בכמה דרכים יכול שירות בתי הסוהר לפזר 300 פליטים מאריתראה בחמישה תאי כלא כך שבשום תא לא יהיו יותר מ 100 פליטים? שימי לב: שירות בתי הסוהר לא מבדיל בין הפליטים השונים!

תשובה סופית לסעיף ב':

$$\binom{304}{4}-5\cdot\binom{204}{4}+\binom{5}{2}\cdot\binom{104}{4}-\binom{5}{3}$$

13/15

הסבר ופירוט חישובים:

נשקול חלוקת 300 כדורים זהים ל-5 תאים, כך שבכל תא לא יהיו יותר 100 כדורים. נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.

נסמן: A_i – חלוקות שבהן בתא ה-i יש יותר מ-100 פליטים. $(1\le i\le 5)$

Ω – כל החלוקות האפשריות.

אנו מחפשים את הביטוי: $|\Omega / (A_1\cup\dots\cup A_5)|$

מתקיים: $|A_i\cap A_j|=\binom{100+5-1}{5-1}$, $1\le i,j\le 5$, $i\ne j$ – נזרוק 100 כדורים לתא ה-i, 100 נוספים לתא ה-j, ואת היותר נסדר בלא הגבלה. 101

$|A_i|=\binom{200+5-1}{5-1}$, $1\le i\le 5$ – נזרוק 100 כדורים לתא ה-i ואת היתר נחלק ללא הגבלה.

$|\Omega|=\binom{300+5-1}{5-1}$ – חלוקת 300 כדור זהים ל-5 תאים.

באותו אופן נקבל: $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{0+5-1}{5-1}=1$, $1\le i,j,k\le 5$ וכולם שונים

לא יתכן יותר מ-3 תאים שבהם 100 כדורים (או יותר) כי יש רק 300 כדורים. כעת נציב בנוסחה:

$$|\Omega/(A_1\cup\dots\cup A_5)| \underset{\text{עפ"י נוסחת ההכלה וההדחה}}{=} |\Omega|-\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}\cdot\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le 5}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}| = |\Omega|-\binom{5}{1}\cdot|A_1|+\binom{5}{2}\cdot|A_1\cap A_2|-\binom{5}{3}|A_1\cap A_2\cap A_3|+0\dots$$

$$=\binom{300+5-1}{5-1}-\binom{5}{1}\cdot\binom{200+5-1}{5-1}+\binom{5}{2}\cdot\binom{100+5-1}{5-1}-\binom{5}{3}\cdot\binom{0+5-1}{5-1}+0\dots$$

$$=\binom{304}{4}-5\cdot\binom{204}{4}+\binom{5}{2}\cdot\binom{104}{4}-\binom{5}{3}$$

[illegible] 101 [illegible] 100

שאלה 2

שאלה 2 סעיף א': (15 נק')

יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחי שיש בגרף 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר.

הוכחה:

נתון G קשיר על 13 קודקודים. ניתן לצבוע את G בשלושה צבעים כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת.

נניח שנתונה צביעה חוקית כלשהי של G, ונראה שיש בגרף חמישה קודקודים שנצבעו באותו הצבע (ולכן קודקודי אינם מחוברים ביניהם).

לפי עיקרון שובך היונים (יונים - הקודקודים 13, שבכים - הצבעים 3), יש לפחות צבע אחד המופיע $5=\lceil \frac{13}{3} \rceil$ פעמים. כלומר, יש 5 קודקודים הצבועים באותו הצבע, כדרוש.

שאלה 2 סעיף ב': (15 נק')

פתרי את נוסחת הנסיגה $a_n=a_{n-2}+2$ עם תנאי ההתחלה: $a_1=2$ ו $a_2=3$.

נוסחה כללית עבור a_n:

$$a_n=n+1$$

פירוט החישובים :

הומוגניזציה: $a_n=a_{n-2}+2,\ a_{n-1}=a_{n-3}+2 \Rightarrow a_n-a_{n-1}=a_{n-2}-a_{n-3}$

$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}.$

תהליך ההומוגניזציה העלה לנו בסדר אחד יותר, לכן נוסיף תנאי התחלה: $a_3=4$.

נניח ש- $a_n=q^n$. אזי: $q^n=q^{n-1}+q^{n-2}-q^{n-3} \quad /:q^{n-3}$

$q\neq 0$ אחרת a_n היתה הסדרה הקבועה 0.

$q^3-q^2-q+1=0$

$q^2(q-1)-(q-1)=0 \Rightarrow (q^2-1)(q-1)=0 \Rightarrow (q-1)^2\cdot(q+1)=0$ ⟨ $q=-1$, $q=1$ ריבוי 2

כל אחת מהסדרות $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{1\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה מקיימת את תנאי ההתחלה, לכן נחפש צירוף לינארי שלהן שכן מקיים אותם:

$d_n=an+b+c(-1)^n$

$d_1=a+b-c=2$

$d_2=2a+b+c=3$

$d_3=3a+b-c=4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\2&1&1&3\\3&1&-1&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&-1&3&-1\\0&-2&2&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&-2&2&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&0&-4&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&0&1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right) \Rightarrow a=1,\ b=1,\ c=0$$

ולכן, $a_n=n+1$.

שאלה 3

שאלה 3 סעיף א': (15 נק')

הוכיחי את השוויון הבא: $2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}3^0$

30/30

הוכחה:

הוכחה אלגברית:

$$2^n = (-1+3)^n \underset{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot 3^{n-k} \underset{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot 3^{n-k} \underset{\downarrow}{=}$$

לפי נוסחת הבינום של ניוטן ~~[illegible]~~ פתיחת הסכום

$$= \binom{n}{0}\cdot(-1)^0\cdot 3^n + (-1)^1\cdot\binom{n}{1}\cdot 3^{n-1} + (-1)^2\cdot\binom{n}{2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\binom{n}{n}3^0 =$$

$$= 3^n - n\cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 3^{n-2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}\cdot 3^{n-k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\cdot 3^0$$

$\square$

15

שאלה 3 סעיף ב': (15 נק')

יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1. כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

תשובה סופית לסעיף ב':

0 מעגלים פשוטים.

הסבר:

$G=(V,E)$ גרף פשוט קשיר. נתון: $|V|=7$. סידרת דרגותיו הינו: 3,2,2,2,1,1,1. לפי משפט בגרף פשוט מתקיים:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot|E|$$

במקרה שלנו:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 3+2+2+2+1+1+1 = 12 = 2|E|$$

לפי סידרת הדרגות הנתונה

ולכן $|E|=6$, כלומר $|E|=7-1$.

לפי משפט האפיון לעצים, גרף פשוט וקשיר בעל n-1 קשתות (ו-n קודקודים) הוא חסר מעגלים – כלומר עץ.

ולכן G שלנו הוא עץ – אין בו אף מעגל!

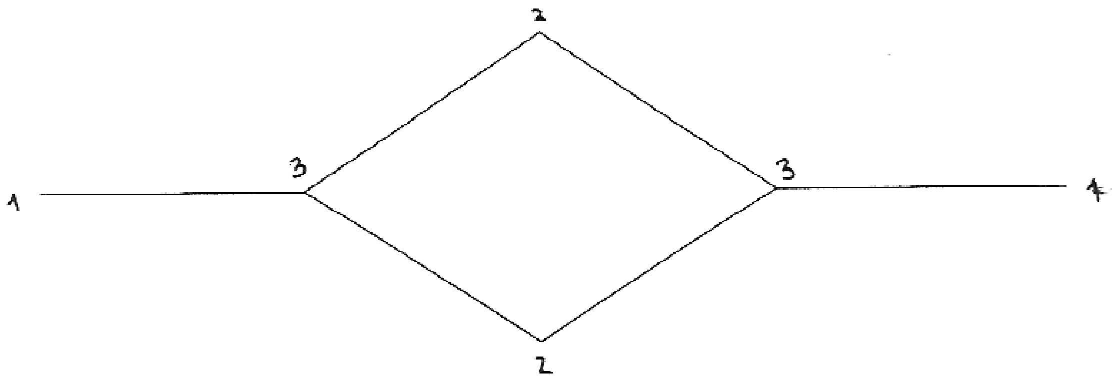
15

שאלה 4

שאלה 4 סעיף א': (15 נק')

כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן, אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים

?{a,b,c,d,e,f}



תשובה סופית לסעיף א':

פירוט חישובים והסבר:

שאלה 4 סעיף ב': (15 נק')

איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי בסעיף 1א, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 6,6,2,4,2. כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מיליון דולר במשך 6 שנים?

תשובה סופית לסעיף ב':

פירוט חישובים ושיקולים: