קומבינטוריקה

1) בחירה וסידור של r מבין n עצמים שונים עם סדר $p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

2) צרוף של r מבין n עצמים שונים בלי סדר $c(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

3) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$

4) משפט הבינום $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

5) תמורה של n עצמים מבין n עצמים לא שונים $\frac{n!}{q_1!\cdot\ldots\cdot q_t!}$

6) למקם n עצמים שונים ב r מקומות עם חזרה על האיברים n^r

7) למקם r עצמים ב n מקומות עם חשיבות לסדר בכל מקום $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$ (מכוניות בשערים)

8) מספר האופנים לבחור r מבין n עצמים שונים (עם חזרה) $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=\binom{n+r-1}{r}$

לחלק r שקלים ל n ילדים, פתרונות שלמים של $x_1+\ldots+x_n=r$

9) מס' האפשרויות לחלק m איברים <u>שונים</u> ל-n תאים שונים כך שבכל תא יש לפחות איבר אחד:

$S(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$ (יש חשיבות לסדר בין התאים, אך לא לסדר בתוך התאים).

עצים

1) T עץ $\Leftrightarrow$ T קשיר עם n-1 צלעות $\Leftrightarrow$ T קשיר ואין מעגל
2) כל צלע שמורידים מעץ הופכת אותו ללא קשיר, כלומר לא עץ.
3) כל צלע שמוסיפים לעץ יוצרת מעגל אחד בדיוק, כלומר הופך ללא עץ.
4) T נקרא <u>עץ פורש</u> של G אם הוא תת גרף שלו ומכיל את כל הקודקודים שלו.
5) G קשיר $\Leftrightarrow$ יש לו עץ פורש

6) מספר העצים הפורשים בגרף שלם בעל n קודקודים n^{n-2}

7) $\tau(G)$ זה מספר העצים הפורשים בגרף G , $\tau(G)=\tau(G\circ e)+\tau(G\setminus e)$,

$G\setminus e$ זה הגרף פחות צלע מסוימת e $G\circ e$ זה הגרף המתקבל ע"י כיווץ e

8) מס' עצים פורשים בגרף שלם עם צלע e קבועה הוא $2n^{n-3}$

נוסחאות נסיגה

$a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}-\ldots-c_{k\ldots}a_{n-k}=Q(n)\beta^n$ שלבי הפתרון -

1) פתירת המשוואה ההומוגנית $a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}-\ldots-c_{k\ldots}a_{n-k}=0$ ע"י מציאת השורשים של הפולינום

האופייני $p(x)=x^k-c_1x^{k-1}-\ldots$ ואז $a_n=\alpha_1(r_1)^n+\ldots+\alpha_k(r_k)^n$ כאשר α_i סקלר, r_i שורש של

הפולינום האופייני (אם r הוא שורש מכפילות m אז $\alpha_1(r)^n+\alpha_2 n(r)^n+\ldots+\alpha_m n^{m-1}(r)^n$

יופיע ב a_n)

2) מחפשים פתרון פרטי לפי $a_n=n^s\cdot f(n)\cdot\beta^n$ כאשר s זה הריבוי של β בפולינום האופייני,

$f(n)$ פולינום ממעלה של $Q(n)$, ואח"כ מציבים אותו בנוסחה המקורית (במקום

a_n,a_{n-1},a_{n-2} וכו')

אם במקום $Q(n)$ יש $\cos\alpha n$ או $\sin\alpha n$ מחפשים פתרון ב $b_0\sin\alpha n+b_1\cos\alpha n$

3) הפתרון הוא סכום של הפתרון הפרטי והפתרון הכללי (עתה מציבים את $a_0,a_1,\ldots$ וכו' למציאת שאר הנעלמים).

4) במקרה שמקבלים שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני α_1,α_2 צמודים, במקום

$a_n=A(\alpha_1)^n+B(\alpha_2)^n$ ניקח את $\frac{1}{2}(\alpha_1)^n+\frac{1}{2}(\alpha_2)^n,\frac{1}{2i}(\alpha_1)^n+\frac{1}{2i}(\alpha_2)^n$ במקום השורשים α_1,α_2

** הפתרון של סדרת פיבונאצ'י - $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\Leftarrow a_n=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

**כללים של מרוכבים $z=a+ib=rcis\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot cis\left(tg\frac{b}{a}\right)$

פונקציות יוצרות

1) משפט המולטינום $(x_1+\ldots+x_t)^n=\sum_{\substack{0\le n_1,\ldots,n_t\le n\\ n_1+\ldots+n_t=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_t}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_t^{n_t}$

2) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ שווה ל $(1+x)^n$ כאשר x=1

3) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

4) $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+\ldots+x^n$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots$, $\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n-1}x^r$

5) $\frac{1}{(1-x)}=\sum_{r=0}^{\infty}\left((-x)^r\right)$,

6) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$ המקדם של x^n בפונקציה $f\cdot g$

הוא $\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$,אם $g=\frac{1}{1-x}$ נקבל שהמקדם של x^n בפונקציה $f\cdot g$ הוא $\sum_{k=0}^{n}a_k$

הכלה ודחייה

1) $e_m=S_m-\binom{m+1}{1}S_{m+1}+\binom{m+2}{2}S_{m+2}+\cdots$, $e_0=S_0-S_1+S_2-\ldots$

2) מספר הבלבולים של n מספרים $\{1,2,\ldots,n\}$ כך שאף אחד לא במקום המקורי

שלו זה $d_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]\approx n!e^{-1}$

3) נוסחת אוילר - $\phi(n)$ *מס המספרים הזרים ל - n מבין* $\{1,\ldots,n\}$, $p_1,p_2,\ldots,p_t$

המספרים הראשוניים המרכיבים את n

$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)=p_1^{n_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{n_2-1}(p_2-1)\ldots p_t^{n_t-1}(p_t-1)$

כדי לפתור את $a_n=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot a_{n-k-1}$ נגדיר $f(x)=a_0+a_1x++a_2x^2+\ldots$ ואז

$$a_nx^n=\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot a_{n-k-1}\right)x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot a_{n-k-1}\right)x^n$$

$$f(x)-a_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot a_{n-k-1}\right)x^n$$

$$f^2(x)=(a_0+a_1x+\ldots)(a_0+a_1x+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot a_{n-k-1}\right)x^n$$

$$f(x)-1=f^2(x)$$

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

הפתרון הוא המקדם של x^n ב- $f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$

גרפים

1) המרחק בין x ל y - $d(x,y)$ זה האורך הקטן ביותר מ x ל y

2) המרכזיות של x - $e(x)=\max(d(x,y))$ לכל $y\in V$ המרחק בין X לקודקוד הרחוק ביותר ממנו

3) הרדיוס של G - $r(G)=\min(e(x))$, ואז $x\in V$ במרכז של G (הקודקוד בעל המרחק הקצר ביותר מהקודקוד הרחוק ביותר שלו, יתכנו מס' קודקודים כאלו)

4) הקוטר של G - $d(G)=\max(e(x))$ המסלול הקצר ביותר בין הקודקודים הרחוקים ביותר

5) בגרף שלם הקוטר שווה לרדיוס והם שווים ל- 1, וגרף בגרף דו חלקי שלם הקוטר שווה לדדיוס ששווה 2

<u>לא מכוונים</u>

1) $\sum\deg(V)=2\cdot|E|$
2) יש מספר זוגי של קודקודים מדרגה אי זוגית
3) אם $n\ge3$ קודקודים ו $e\ge n$ צלעות אז יש מעגל
4) בגרף קשיר עם n קודקודים יש לפחות $n-1$ צלעות
5) G גרף קשיר, $E\setminus\{e\}$ קשיר $\Leftrightarrow$ e שייכת למעגל ב G
6) גרף שלם K_n - יש בו n קודקודים ו $\binom{n}{2}$ צלעות,

הוא $(n-1)$ רגולרי

7) גרף דו-צדדי $K_{n,m}$ - ניתן לצבוע את הקודקודים בשני

צבעים כך שאין צלעות בין קודקודים מאותו צבע,
G גרף דו צדדי $\Leftrightarrow$ כל המעגלים הפשוטים שלו הם

באורך זוגי, בגרף דו צדדי שלם- $|E|=n\cdot m$,

8) בגרף n-קוביה יש 2^n קודקודים ו $n\cdot2^{n-1}$ (n רגולרי)

<u>המילטון ואוילר</u>

1) מסילת המילטון- כל <u>קודקוד</u> בגרף מופיע במסילה פעם אחת בלבד
2) אם G גרף לא מכוון שלם אז יש מעגל המילטון, מעגל המילטון ← n≥3 וערכיות כל קודקוד ≤ $n/2$

בגרף $k_{n,m}$: אם m=n יש מעגל המילטון, אם |n-m|=1 יש מסילה, אחרת אין.

אם סכום הדרגות של כל שני קודקודים לא סמוכים≤ n יש מעגל המילטון, אם ≤ n-1 יש מסילה
3) מסילת אוילר – כל <u>הצלעות</u> בגרף מופיעות פעם אחת בלבד
4) משפט אוילר עבור גרף לא מכוון -
יש <u>מסילת</u> אוילר $\Leftrightarrow$ הגרף הוא קשיר ויש בדיוק 2 קודקודים בגרף עם דרגה אי זוגית.
יש <u>מעגל</u> אוילר $\Leftrightarrow$ הגרף קשיר ולכל הקודקודים בגרף דרגה זוגית.
5) משפט אוילר עבור גרף מכוון -
יש <u>מעגל</u> אוילר $\Leftrightarrow$ הגרף הוא קשיר בינוני ובכל קודקוד הדרגה הנכנסת שווה לדרגה היוצאת.
יש <u>מסילת</u> אוילר $\Leftrightarrow$ הגרף קשיר בינוני,יש קודקוד אחד שבו הדרגה הנכנסת גדולה באחד מהדרגה היוצאת, יש קודקוד אחד שבו הדרגה היוצאת גדולה באחד מהדרגה הנכנסת.
6) בגרף שלם קיים מעגל אוילר $\Leftrightarrow$ מספר הקודקודים אי-זוגי

<u>גרפים מישוריים</u>

1) גרף G הוא מישורי אם ניתן לצייר אותו על המישור כך שכל הצלעות חותכות זו את זו רק בקודקודים.
2) נוסחת אוילר – G גרף מישורי קשיר , r מספר המדינות בגרף $r-e+v=2$
3) $e\le3v-6$, $2e\ge3r$
4) הגרפים K_5 ו $K_{3,3}$ הם לא מישוריים וכך גם כל גרף שיש לו תת גרף הומאומורפי להם
5) בגרף מישורי קיים קודקוד שדרגתו קטנה/שווה 5

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

<u>פולינום פגיעה:</u>

בהינתן לוח ריבועי $n*n$ של משבצות שחלקן שחורות , פולינום הפגיעות של הלוח הוא פולינום שבו המקדם של x^k הוא מספר האופנים להעמיד n צריחים על הלוח כך שבדיוק k מתוכם בחלק השחור:

$$E(x)=\sum_{m=0}^{n}e_mx^m=\sum_{m=0}^{n}S_m(x-1)^m=e_0+e_1x+e_2x^2+\ldots$$

פתרון נוסאות נסיגה :

קבוע: (חלק הומוגני) + קבוע : A (שורש אחד)^n + B(שורש שני)^n + C

מעריכי: (חלק הומוגני) + קבוע*2^n : נבדוק האם בסיס החלק המעריכי הוא אחד משורשי החלק ההומוגני. אם נוסיף את הריבוי בחלק ההומוגני :
(An+B) (שורש ראשון)^n + C (שורש שני)^n

אחרת (החלק הלא הומוגני אינו שורש של החלק ההומוגני) :
A (שורש ראשון) ^n + B (שורש שני)^n +C (n^2) – וזאת בלי האיבר החופשי של n^2

פולינום: (חלק הומוגני) + 4n^2 / 3n^2+2n+1 / 3n
A (שורש ראשון)^n + B (שורש שני)^n +Cn^2 / Cn^2 +Dn +E / Cn

פולינום * מעריכי : (חלק הומוגני) + (2n-1)2^n
אם הבסיס המעריכי (n^2) הוא אחד משורשי המשוואה :
D (שורש שני)^n + (שורש ראשון)^n (An^2 + Bn + C)

אחרת (אינו אחד מהשורשים) : A (שורש אחד)^n + B(שורש שני)^n + C*n*2^n + D n^2

בעיות שונות

1) מס' הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ הוא המקדם של x^7 ב- $\frac{1}{(1-x)^4}=(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4 \Leftarrow \binom{10}{3}=\binom{n+k-1}{k-1}$

2) מלה מונוטונית באורך n מעל $\{1\ldots9\}$ כמו מס' הפתרונות של $x_1+\ldots+x_9=n$

3) $\sum_{k=t}^{n}\binom{k}{t}$ הוא המקדם של x^t ב- $\sum_{k=t}^{n}(1+x)^k$

4) בעיה: בחירת 3 מ 4 קורסים (4 נק', 3 נק', 2 נק', 2 נק') ב-10 סמסטרים 80 נק':

פונ' יוצרת: $(x^7+x^8+2x^9)^{10}$ (כל האפשריות לקורסים פר סמסטר) $(x^7+x^8+2x^9)^{10}=x^{80}\left(\frac{1}{x}+1+2x\right)^{10}$ והמקדם הוא

$$2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$$

5) מספר הדרכים לקבל את הסכום n ע"י m הטלות קוביה בהנחה שסדר ההטלות משנה $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-6k-1}{m-1}$

6)מספר המחלקים של 5400 , $5400=2^3 3^3 5^2$ הפונקציה היוצרת היא $(1+x+x^2+x^3)^2(1+x+x^2)$ כדי למצוא את מספר הפתרונות נציב $x=1$ כדי למצוא את סכום המחלקים נציב x=1 בפונקציה היוצרת עם המקדמים
$$(1+2x+2^2x^2+2^3x^3)(1+3x+3^2x^2+3^3x^3)(1+5x+5^2x^2)$$

7) המקדם של $r^2w^3x^2y^5z^4$ ב- $(r+w+x+y+z)^{16}$ הוא $\binom{16}{2,3,2,5,4}$.

8) לכמה מספרים בקטע $[1\text{-}10^{30}]$ יש שורש מסדר 2 ? 10^{15}'שורש מסדר 3 ? 10^{10}, שורש מסדר 2 וגם שורש מסדר 3 ? 10^5 ...

סכומים

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{m+1} \qquad \binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}^{n}=n(2)^{n-1}$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^r\binom{n}{r}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0$$

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=1^2x+2^2x^2+3^2x^3+\ldots \qquad \frac{x}{(1-x)^2}=1x+2x^2+3x^3+\ldots$$

$$\binom{m+i}{i}\binom{m+k}{m+i}=\binom{m+k}{m}\binom{k}{i} \qquad \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}=\binom{n}{k}$$

סכום טור הנדסי: $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^n=a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

סכום טור הנדסי אינסופי: $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^n+\ldots=a\frac{1}{1-q}$

נגזרות $\frac{1}{1-x}\to\frac{1}{(1-x)^2}\to\frac{2}{(1-x)^3}\to\frac{6}{(1-x)^4}\to\frac{24}{(1-x)^5}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

מדף תרגילים מספר 1 -

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m}{m-k}=\binom{n+1}{m} \qquad (n+1)\binom{n}{r}=(r+1)\binom{n+1}{r+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k-l)\binom{n}{k}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-l)2^{n-l-1}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+m}{m}=\binom{n+1}{m+1} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$$

$$p(n,k)=n\cdot p(n-1,k-1)=(n-k+1)p(n,k-1)=\frac{n}{n-k}p(n-1,k)$$

$$(e^x-1)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+k}{m}\frac{m!}{(m+k)!}x^{m+k}$$