18/6/08

אלגברה לינארית - תרגול מס' 16

בפעם הקודמת דיברנו על: $T: V^A \to W^B$

$[T(x)]_B = [T]_B^A [x]_A$

$I: V^A \to V^B$

$[I]_B^A = \left([I]_A^B\right)^{-1}$

* בדרך כלל הרצה המטריצות בין הבסיסים אינה הפיכה

יהיה במבחן:

$T: V_A \to V_B$ אז $[T]_A$, $[T]_B$ דומות.

* מטריצות ריבועיות A, B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש: $B = P^{-1}AP$.

בנוסף מתקיים: $[T]_A = [I]_A^B [T]_B [I]_B^A$

תרגיל:

נתונה העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ונתונים הבסיסים הבאים של $\mathbb{R}^2$.
$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$F = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

מצא את $[T]_E$, $[T]_F$, $[T]_E^F$ ודברים נוספים.

פתרון:

* $[T]_E$:

עמודה ראשונה

מוצגים הנקודה לפי בסיס E (הרגיל)

$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2e_1 + (-4)e_2$

$T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$

$\Rightarrow [T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

* $[T]_F$:

כאן נצטרך לפתור משוואות

$T(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 6f_1 + 4f_2$

עמודה ראשונה מוכפלת ב-(-)

$T(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-3)f_1 + (-2)f_2$

$\Rightarrow [T]_F = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

אלגברה לינארית
תרגול מס 16

* מהי המטריצה P כך ש $[T]_F = P^{-1}[T]_E P$?

$P = [I]_E^F$, $P^{-1} = [I]_F^E$

* I במקרה הזה היא טרנספורמצית הזהות.
$I: V \to V : Iv = v$

נחשב $[I]_E^F$:

$I(f_1) = f_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ (צירוף לינארי של וקטורי E)

$I(f_2) = f_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

$$\Rightarrow \quad [I]_E^F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

נרצה לחשב את P^{-1} - איך? או להשתמש בשיטות לחישוב הופכית, או לבצע את אותה דרך בדיוק על $[I]_F^E$.

* נחשב את $[I]_F^E = P^{-1}$

$I(e_1) = e_1 = (-1) f_1 + 0 \cdot f_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$I(e_2) = e_2 = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: קיבלנו ש- $P = P^{-1}$ - אבל אין מה לדאוג מזה!

שאלה: $T: V \to V$. אם $[T]_A$ אינה הפיכה, מה ניתן לומר על $[T]_B$?

תשובה: $[T]_A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ הפיכה מכיוון שהן מטריצות דומות, והרי הדטרמיננטות של מטריצות דומות שוות.

רבותיי, אתם עדר יותר מדי גדול בשבילי, קשה לי לכנס אתכם.

* נחשב $[T]_E^F$:

$T(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2e_1 + 4e_2$ (מוצגים הצגה לפי בסיס E)

$T(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2$

$$\Rightarrow \quad [T]_E^F = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

תרגיל:

יהיו A,B מטריצות ריבועיות דומות. הראה ש- $\det(A)=\det(B)$.

פתרון:

מכיוון ש- A,B דומות אז קיים P הפיכה כך ש: $A=P^{-1}BP$. לכן

$$|A|=|P^{-1}BP| \underset{\substack{\text{לפי תוצאה מנוסחת}\\ \text{המכפלה}\\ |AB|=|BA|}}{=} |P(P^{-1}B)| \underset{\substack{\text{אסוציאטיביות של}\\ \text{כפל מטריצות}}}{=} |(PP^{-1})B|=|IB|=|B|$$

שימו ♡:

אם לשתי מטריצות יש את אותו דטרמיננטה, זה לא אומר שהן דומות.

לדוגמה: $\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$

מטריצה סקלרית תמיד דומה רק לעצמה

$$P^{-1}(2I)P=2(P^{-1}IP)=2I_2\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

תרגיל:

מצא העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש- $\operatorname{Im}T=sp\{\underbrace{w_1,\dots,w_k}_{\substack{\text{נניח בסיס - אם}\\ \text{לא, נדלל.}}}\}\subseteq W$

פתרון:

נבחר בסיס ל- V: $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, ונגדיר:

$$T(e_1)=w_1,\quad T(e_2)=w_2,\ \dots,\ T(e_k)=w_k,$$
$$T(e_{k+1})=0,\dots,\ T(e_n)=0.$$

לשיעור חברה להגיע עם שאלות.